

Blätterungen von 3-Mannigfaltigkeiten

Bernhard Albach

Hausarbeit zur Vorlesung Kirby-Kalkül

28.6.2018

Mathematisches Institut

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Universität zu Köln

Betreuung: Dr. Marc Kegel

Zusammenfassung

In dieser Hausarbeit werden wir mittels Chirurgie beweisen, dass jede 3-dimensionale, orientierte, glatte und geschlossene Mannigfaltigkeit eine 2-dimensionale Blätterung besitzt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Definitionen	2
1.2	Idee	2
2	Blätterungen	5
2.1	Blätterung der Tori	5
2.2	Blätterung von S^3 ohne Tori	6
3	Existenz der Blätterung	13
	Literaturverzeichnis	14

1 Einleitung

Blätterungen von Mannigfaltigkeiten sind Zerlegungen einer solchen in eingebettete Untermannigfaltigkeiten einer festen kleineren Dimension. Dies gibt eine Struktur auf der Mannigfaltigkeit, die man für ein besseres Verständnis der Mannigfaltigkeit nutzen kann. In dieser Arbeit wollen wir einen Satz von Lickorish beweisen, der besagt, dass jede geschlossene, orientierbare und glatte 3-Mannigfaltigkeit mit einer 2-dimensionalen Blätterung versehen werden kann (siehe [4]). Dazu nutzen wir den Satz von Lickorish und Wallace [3][7] und schreiben eine beliebige 3-Mannigfaltigkeit als eine Dehn-Chirurgie entlang einer Verschlingung in S^3 und konstruieren separat Blätterungen auf dem Verschlingungskomplement und den neuherein geklebten Volltori, um diese zu einer globalen Blätterung der 3-Mannigfaltigkeit zu verkleben.

Inhaltlich werde ich mich dabei sehr stark an Lickorish orientieren [4]. Für das Verkleben von Blätterungen werde ich, im Vergleich zu ihm, leicht abgeschwächte Anforderung an die Blätterung stellen, die den Beweis für die Möglichkeit einer Verklebung der Blätterung in dem Aspekt der Glätte der Mannigfaltigkeit und damit der Existenz einer Blätterung verändert, es dafür aber ermöglicht mehr Blätterungen miteinander zu verkleben. Die Blätterungen auf den Chirurgievolltori werden analog zu der Blätterung von Reeb [6] sein, die des Chirurgiekomplementes analog zu der von Lickorish [4] und die analytischen Beweise, dass dies Blätterungen sind, sind ebenfalls analog zu [4], wobei diese so leicht verallgemeinert werden, dass die Chirurgieverschlingung sich nicht mehr nur einmal pro Knoten um eine fest gewählte Achse winden muss. Dies ermöglicht dann auch einen kürzeren Beweis der Existenz der 2-dimensionalen Blätterung auf jeder 3-Mannigfaltigkeit, da im Gegensatz zum Originalbeweis nicht mehr die Form der Verschlingung explizit beschrieben werden muss.

Solange nicht anders erwähnt, wird mit Mannigfaltigkeit immer eine geschlossene, orientierbare, glatte und zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit gemeint sein, weiterhin werden alle Abbildungen als glatt vorausgesetzt.

1.1 Definitionen

Sei M eine Mannigfaltigkeit von Dimension n und $r < n$.

Dann ist eine **Blätterung von Dimension r** eine Zerlegung von M in Teilmengen $B_i, i \in I$, für eine beliebige Indexmenge I , die die folgenden beiden Eigenschaften erfüllen:

1. Für alle $i \in I$ existiert eine glatte zusammenhängende r -dimensionale Mannigfaltigkeit \tilde{B}_i und eine Einbettung $\phi_i : \tilde{B}_i \rightarrow M$, so dass B_i das Bild von \tilde{B}_i ist.
2. Für alle $y \in M$ gibt es eine offene Umgebung $N \subset M$ von y und einen Diffeomorphismus h , so dass:
 - a) $h : N \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn $y \in \overset{\circ}{M}$,
 - b) $h : N \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, wenn $y \in \partial M$,mit der Eigenschaft, dass für alle i gilt, dass $\phi_i^{-1}h^{-1}$ ein Diffeomorphismus von

$$\{x \in \mathbb{R}^n (\text{bzw. } \mathbb{R}_+^n) : x_j = c(i), j = 1, \dots, n - r\}$$

auf eine offene Teilmenge von \tilde{B}_i ist, wobei $c(i)$ eine Konstante ist, die von i abhängt und für jedes i anders ist.

Die B_i heißen dann **Blätter** der Blätterung.

Aus der zweiten Eigenschaft folgt, dass die Blätterung eingeschränkt auf ∂M eine Blätterung des Randes ergibt.

In dieser Arbeit wird es, wenn nicht anders erwähnt, nur um 2-dimensionale Blätterung von 3-Mannigfaltigkeiten gehen.

1.2 Idee

Die wichtigste Grundlage für dieses Thema ist der Satz von Lickorish und Wallace, der aussagt, dass man jede 3-dimensionale orientierte, geschlossene und zusammenhängende Mannigfaltigkeit durch Chirurgie entlang einer Verschlingung aus S^3 erhalten kann. Die Idee wird deshalb sein, zuerst eine geeignete Blätterung auf $S^3 - \bigcup_{j \in J} \overset{\circ}{S}_j$ (wobei die S_j die Chirurgievolltori sind, also tubulare Umgebungen der Knoten der Chirurgieverschlingung) und separat auf den Volltori zu konstruieren und diese dann so zusammen zu verkleben, dass man die gewünschte Mannigfaltigkeit erhält. Für zwei n -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit diffeomorphen Rand gilt im allgemeinen nicht, dass die jeweiligen Blätterungen auf eine Blätterung der Verklebung der Mannigfaltigkeiten am Rand erweitern. Wenn die Blätterung allerdings eine bestimmte Form am Rand haben, kann man sie doch miteinander verkleben.

Definition 1.1

Eine $(n-1)$ -dimensionale Blätterung einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt **trivial am Rand**, wenn jede Randkomponenten von M genau einem Blatt entspricht.

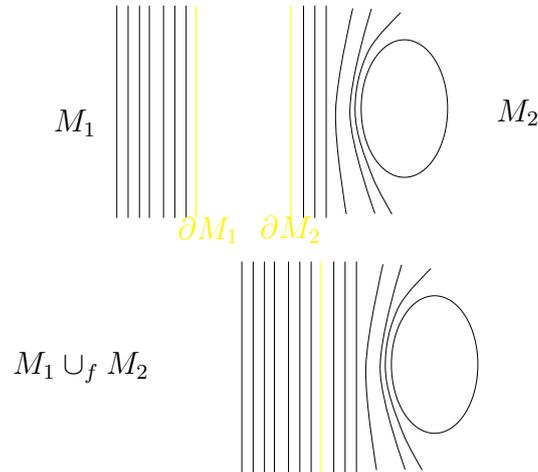


Abbildung 1: Verkleben von am Rand trivialen Blätterungen

Lemma 1.2

Seien M_1 und M_2 zwei n -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand, auf denen jeweils eine $(n-1)$ -dimensionale, am Rands triviale Blätterungen existiert und es gebe ein Diffeomorphismus $f : \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$, dann können wir die Blätterungen verkleben, das heißt $M_1 \cup_f M_2$ trägt eine Blätterung bestehend aus den Blättern von M_1 und M_2 (siehe Abbildung 1).

Beweis. Bevor man sich die Blätterung anschauen kann, ist es wichtig zu zeigen, dass auf $M_1 \cup_f M_2$ eine glatte Struktur existiert. Dafür nutze aus, dass es eine Krümmung des Randes ∂M_1 bzw. ∂M_2 gibt, also Umgebungen diffeomorph zu $[-\epsilon, 0] \times \partial M_1$ und $[0, \epsilon] \times \partial M_2$ (Die Existenz wurde in [2] bewiesen). Der Diffeomorphismus f lässt sich dann als Abbildung von $\{0\} \times \partial M_1$ auf $\{0\} \times \partial M_2$ interpretieren und erweitert auf folgenden Diffeomorphismus:

$$F : [-\epsilon, 0] \times \partial M_1 \rightarrow [0, \epsilon] \times \partial M_2$$

$$F(t, x) = (-t, f(x))$$

Die Mannigfaltigkeit, die man erhält, wenn man M_1 und M_2 mit Hilfe von F vereinigt, trägt dann eine glatte Struktur. Wähle in $M_1 \cup_F M_2$ eine Kopie von $\partial M_1 = \partial M_2$, z.B. die Äquivalenzklassen von $\{0\} \times \partial M_1$. $M_1 \cup_F M_2$ ohne diese Kopie zerfällt dann in zwei Zusammenhangskomponenten, die diffeomorph zu $M_1 - \partial M_1$ bzw. $M_2 - \partial M_2$

sind. Damit induziert die glatte Struktur von $M_1 \cup_F M_2$ eine glatte Struktur auf $M_1 \cup_f M_2$ und man kann sinnvoll von Blätterungen auf $M_1 \cup_f M_2$ reden.

Die erste Bedingung für eine Blätterung ist offensichtlich erfüllt, da f jeweils genau die Blätter, die den Rand bilden, miteinander identifiziert. Für Punkte, die nicht in ∂M_1 oder ∂M_2 liegen, ist auch die zweite Bedingung trivialerweise erfüllt, da diese lokal ist und lokal nichts verändert wurde. Sei also $x \in \partial M_1$ und $f(x)$ der Punkt, mit dem x in ∂M_2 identifiziert wird. Dann gibt es Umgebungen N_1 von x und N_2 von $f(x)$ und zwei Diffeomorphismen $h_i : N_i \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ der Form aus der Definition der Blätterung. Da \mathbb{R}_+^n diffeomorph zu \mathbb{R}_-^n ist erweitern diese Abbildungen zusammen zu eine Abbildung $h : N \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $N = (N_1 \cup N_2) / \sim_{f(x)}$ eine offene Umgebung der Äquivalenzklasse von x und $f(x)$ in $M_1 \cup_f M_2$ ist und dieser Diffeomorphismus die Bedingung aus dem zweiten Punkt der Definition der Blätterung erfüllt. Dabei ist h , nach Konstruktion der glatten Struktur, ein Diffeomorphismus.

□

2 Blätterungen

2.1 Blätterung der Tori

Auf dem Volltorus existiert nach G. Reeb [6] eine am Rand triviale Blätterung, die **Reeb-Blätterung**, deren Blätter durch den Randtorus und 2-dimensionalen Scheiben im inneren gegeben sind (siehe Abbildung 2). Die C^∞ -Funktion

$$f : D^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \mapsto e^t(|x|^2 - 1),$$

definiert die Blätter durch ihre Niveaumengen. Dies bildet dann zuerst eine Blätterung auf $D^2 \times \mathbb{R}$. Um die Blätterung auf dem Volltorus zu erhalten, identifiziere den Volltorus mit $(D^2 \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ durch $(x, t) \sim (x, t + n), n \in \mathbb{Z}$.

Dabei werden jeweils Blätter miteinander identifiziert, weshalb dies eine Blätterung auf dem Volltorus induziert.

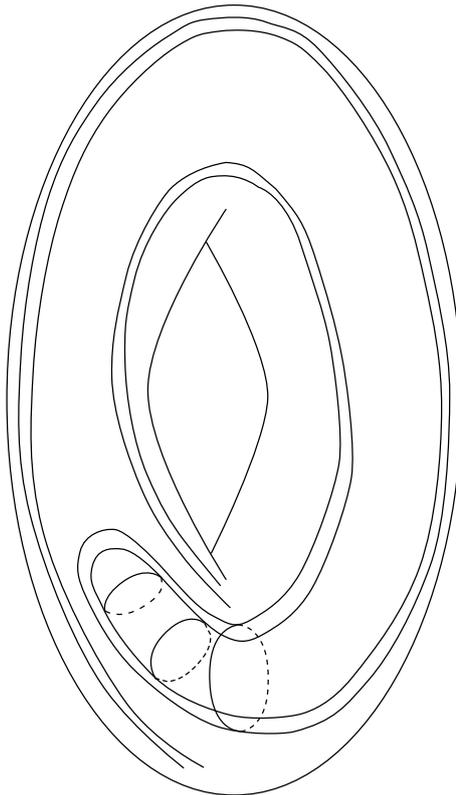


Abbildung 2: Reeb-Blätterung

2.2 Blätterung von S^3 ohne Tori

Lemma 2.1

Seien B_1, \dots, B_q disjunkte Scheiben im Inneren einer D^2 . Dann existiert auf $S^1 \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$ eine am Rand triviale Blätterung.

Beweis. Betrachte den Längsschnitt von $S^1 \times D^2$, definiert als Schnitt des Volltorus V mit einer Ebene, so dass der Schnitt die Form $S^1 \times D^1$ hat. Ohne Einschränkung ist der Schnitt jedes entfernten Volltorus S_i mit der Ebene nicht leer, damit sieht ein Teil dieses Längsschnittes aus wie Abbildung 3. Es solle eine Blätterung konstruiert

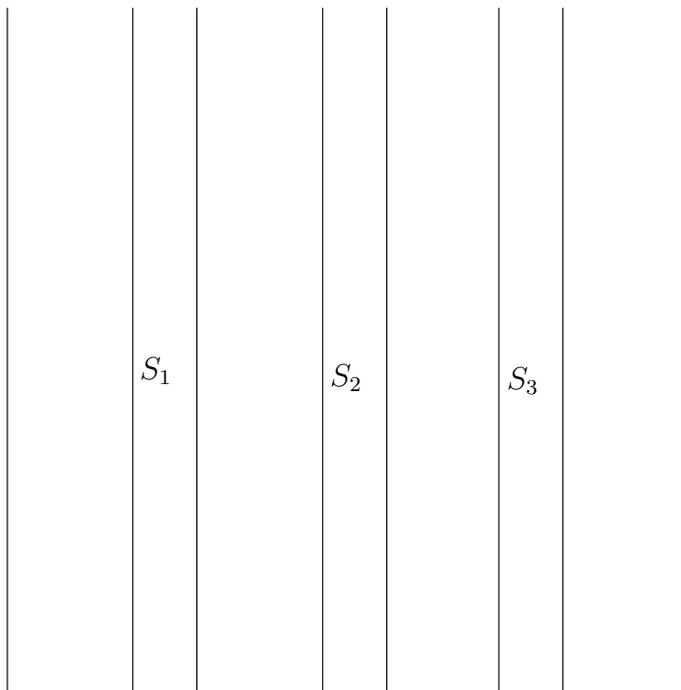


Abbildung 3: Längsschnitt durch den Volltorus V mit entfernten Volltori S_i

werden, die trivial am Rand ist. Deswegen wählen wir in der Umgebung der entfernten Volltori S_i und des Randes von V ($[0, 1] \times \partial S_i$ bzw. $[0, 1] \times \partial V$) die Blätterung gegeben durch $\{t\} \times S_i$ bzw. $\{t\} \times V$, dies sind jeweils Tori (Abbildung 4).

Den Raum zwischen den bereits gewählten Blättern, gegeben durch Tori, zu füllen geht allerdings nicht ganz so einfach wie bei der Reeb-Blätterung, bei der man den Raum dazwischen durch Flächen füllt, deren Steigung von minus unendlich zu null wird, um dann wieder gegen unendlich zu laufen (Abbildung 5), denn im Gegensatz zur Reeb-Blätterung kann man diese Flächen nicht um die Seele des Volltorus V rotieren, um damit eine 2-dimensionale Blätterung zu erhalten, da man dabei auch die entfernten Volltori S_i mitrotieren würde.

Deshalb muss man etwas anders vorgehen und betrachtet dafür erst einmal nur

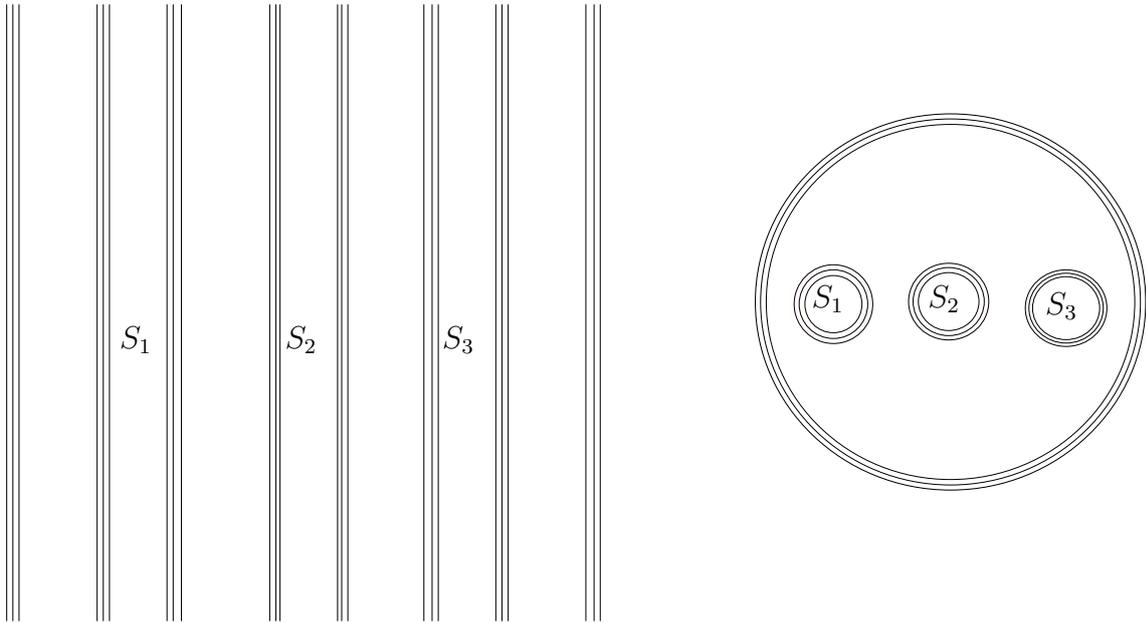


Abbildung 4: Längsschnitt und Querschnitt ($s_0 \times D^2$) mit Tori als Blätterung der Umgebung

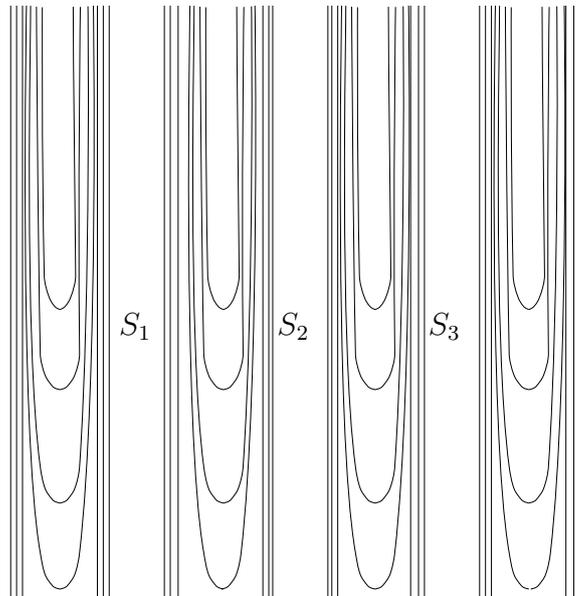


Abbildung 5: Längsschnitt

eine Umgebung eines entfernten Volltorus S_i . Dort wähle eine Blätterung wie in Abbildung 6. Diese Blätterung kann man dann in jeder Umgebung eines entfernten Volltorus S_i und des Randes des gesamten Volltorus V wählen und dann um diese rotieren, um eine Blätterung in einer Umgebung dieser zu erhalten. Da die Blätterung waagrecht am Rand dieser Umgebungen ist, lässt sie sich durch eine waagrechte Fläche in jedem $t \times D^2$ außerhalb der Umgebungen um die Volltori verbinden, wie man im Querschnitt in Abbildung 7 und in Abbildung 8 sieht.

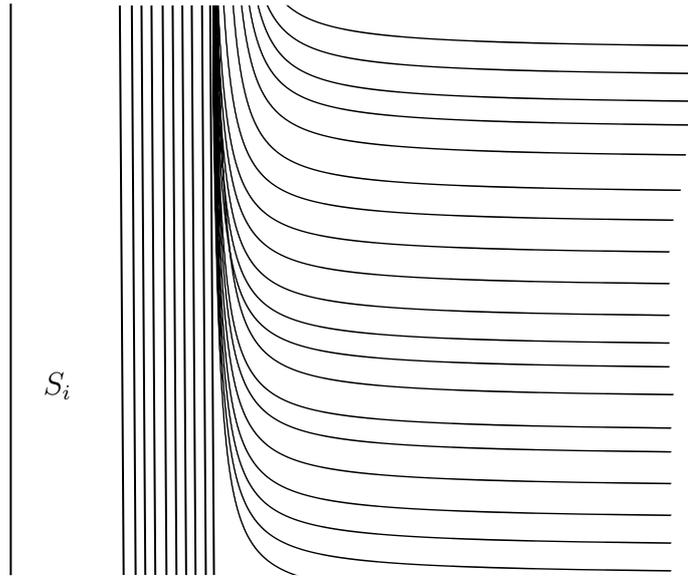


Abbildung 6: Blätterung in Umgebung um entfernten Volltorus S_i

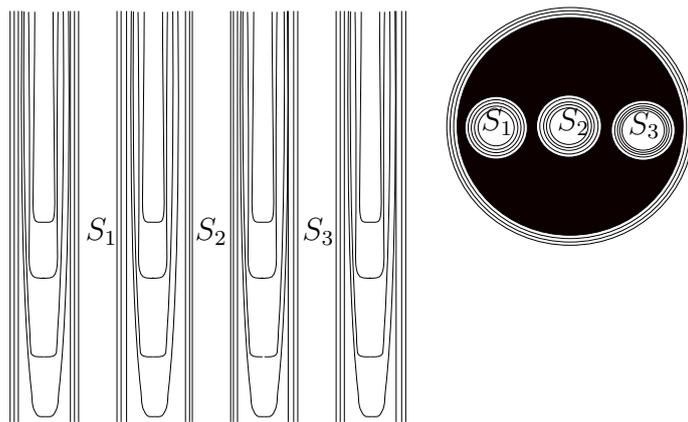


Abbildung 7: Längsschnitt und Querschnitt der Blätterung

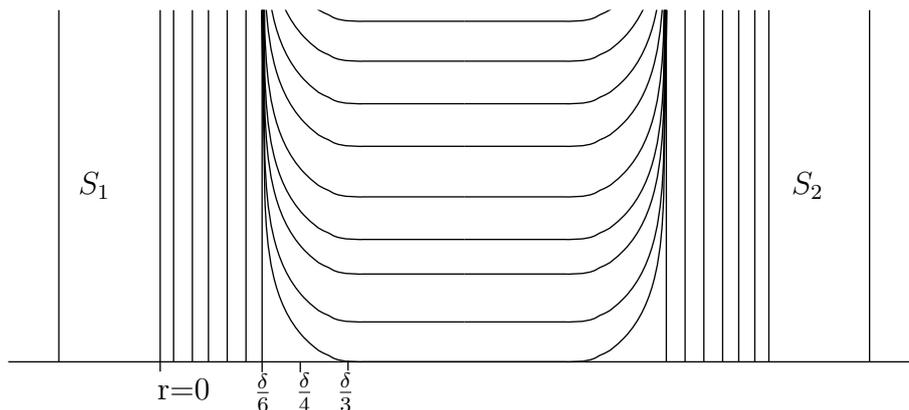


Abbildung 8: Blätterung zwischen zwei entfernten Volltori S_i

Analytisch lässt sich dies wie folgt beschreiben:

Beginne mit einer 1-dimensionalen Blätterung des \mathbb{R}^2 , gegeben durch die Kurven $y=e^{1/x}+i$, für $x>0$ bzw. $x=j$; $j \leq 0$; $i, j \in \mathbb{R}$ (siehe Abbildung 9).

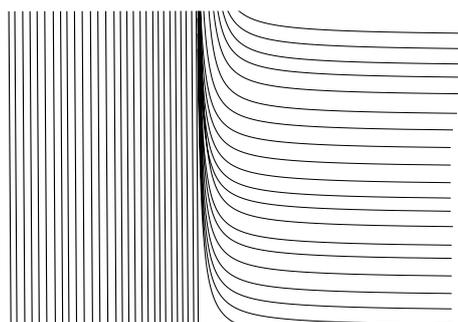


Abbildung 9: Blätterung des \mathbb{R}^2

Wir wollen zeigen, dass dies eine Blätterung ist: Die erste Bedingung für Blätterungen ist offensichtlich erfüllt, da die Blätter alle durch Kurven gegeben sind, die sich nicht schneiden und den gesamten \mathbb{R}^2 ausfüllen. Daher bleibt nur noch zu zeigen, dass auch die zweite Bedingung erfüllt ist:

Für $(x,y) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$ gilt dies offensichtlich für $(x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ wähle zum Beispiel $B_x(x, y)$ als offene Umgebung und der Diffeomorphismus $F(x, y) = (x, y - e^{1/x})$ liefert uns die gewünschte Form.

Für den letzten Fall $x=0$ betrachte folgende Funktion:

$$F : \left\{ (x, y) : x \leq 0 \text{ oder } y < e^{1/x} - 1 \right\} \rightarrow \left\{ (x, y) : x \leq 0 \text{ oder } y > 1 - e^{1/x} \right\}$$

$$F(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\log(e^{1/x}-y)}, y \right) & x > 0 \\ (x, y) & x \leq 0 \end{cases}$$

Dies ist ein Diffeomorphismus, der die Kurven $y=e^{1/x}$ (mit $i < -1$ nach Wahl des Definitionsbereiches) auf die Gerade $x=(\log(-i))^{-1}$ abbildet und damit die Bedingung 2 für alle Punkte von der Form $(0,y)$ erfüllt.

Die Idee für die Blätterung von $S^1 \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$ ist, diese Blätterung für ein $x_0 \leq 0$ geeignet zu nehmen und einmal um die Achse $\{(x_0, y)\}$ zu drehen. Allerdings nimmt man dann nur die Blätter, die einen gewissen Abstand zur Rotationsachse haben, um einen entfernten Volltorus zu erhalten.

Sei d eine gewählte Metrik auf \mathbb{R}^2 und δ definiert durch:

$$\delta := \min_{1 \leq j, k, l \leq q} \left\{ d(B_j, B_k), d(B_l, \partial D^2) \right\}$$

Da wir die anfangs gewählte Blätterung um jeden Volltorus rotieren wollen, müssen wir die Blätterungen dann aber noch glatt verbinden, deswegen brauchen wir noch eine Abschneidefunktion β mit folgenden Eigenschaften:

$$\beta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 & t \leq \frac{\delta}{4} \\ 0 & t \geq \frac{\delta}{3} \end{cases}$$

Definiere $f : (\frac{\delta}{6}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(t) = \beta(t) \exp\left(\frac{1}{t - \frac{\delta}{6}}\right)$$

und analog zu der vorherig definierten Blätterung definieren wir die Blätter L_i durch

$$z = f(r) + i, \quad r > \frac{\delta}{6}$$

wobei r definiert ist als

$$r(x, y) = d \left\{ (x, y), \partial D^2 \cup \bigcup_{j=1}^q B_j \right\}$$

Für $0 \leq r \leq \frac{\delta}{6}$ seien K_i die zylindrischen Flächen gegeben durch $r=i$, mit $i \in [0, \frac{\delta}{6})$ fest (Abbildung 8).

Beh. Die K_i und L_i zusammen ergeben die gesuchte Blätterung von $\mathbb{R} \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$.

Beweis. Die erste Bedingung ist wieder offensichtlich erfüllt. Bleibt die zweite zu zeigen: Sei y ein Punkt in $\mathbb{R} \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$. Wenn für den Punkt gilt, dass $r \neq \frac{\delta}{6}$, dann gibt es eine Umgebung, in der nur Blätter von der Form K_i oder L_i liegen, womit die Umgebung so klein gewählt werden kann, dass die Blätterung in der

Umgebung trivial ist. Für Punkte mit $r = \frac{\delta}{6}$ sieht die Blätterung in einer ausreichend kleinen Umgebung so aus wie die bereits konstruierte des \mathbb{R}^2 im Produkt mit $(0,1)$ und erfüllt damit auch Bedingung 2. □

Die Äquivalenzrelation $(x,y,z) \sim (x,y,z+n)$, $n \in \mathbb{N}$, gibt uns eine Äquivalenzrelation auf den Blättern (da wir die Blätter als Tori bzw. als $z=f(r)+i$ gewählt hatten), so dass wir die gesuchte Blätterung von $S^1 \times (D^2 - \bigcup_1^q \overset{\circ}{B}_j)$ erhalten. □

In Lemma 1 haben wir die Form der entfernten Volltori explizit als unverschlungen eingeschränkt, im allgemeinen sind Chirurgietori jedoch durchaus verschlungen, weswegen eine Verallgemeinerung auf den Fall, dass die Tori miteinander verschlungen sind, nötig ist:

Lemma 2.2

Seien S_1, \dots, S_q disjunkte Volltori in $S^1 \times D^2$, wobei jeder Torus als das Bild einer Einbettung $e_j : S^1 \times D^2 \rightarrow S^1 \times D^2$ gegeben sei, mit der Eigenschaft, dass es für alle $s \in S^1$ ein $t \in S^1$ gibt, sodass $e_j(s \times D^2)$ eine Teilmenge von $t \times \overset{\circ}{D}^2$ ist, dann existiert eine am Rand triviale Blätterung auf $(S^1 \times D^2) - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{S}_j$.

Beweis. Die Idee dieses Beweises ist, den gesamten Volltorus V aufzuschneiden, dann bilden die entfernten Volltori S_j einen dicken Zopf (siehe z.B. [2]) und wenn man den oberen Rand des gesamten und den äußeren Rand des aufgeschnittenen Volltorus V , aus dem die anderen Volltori S_j entfernt werden, festhält, kann man die Zöpfe unten noch so bewegen (wie z.B. durch den Pfeil in Abbildung 10 angedeutet), dass sie unverschlungen sind, womit man dann Lemma 2.1 anwenden kann.

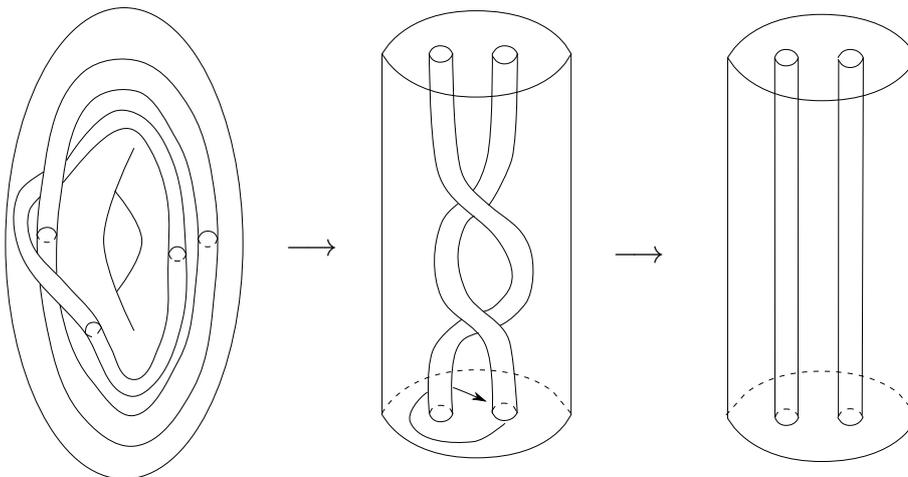


Abbildung 10: Beweisidee von Lemma 2.2

Diese Beweisidee kann man folgendermaßen analytisch beweisen:

Um dieses Lemma auf Lemma 2.1 zurück zuführen, müssen wir die entfernten Volltori S_j in die Standardform, also nicht miteinander verschlungen, bringen, beziehungsweise, wenn man den Volltorus V aufgeschnitten betrachtet, in die Form eines dicken, reinen, unverschlungenen Zopfes. Dafür fassen wir sie als tubulare Umgebungen der **Kerne** C_j auf, wobei diese definiert sind als der einfach geschlossene Weg $e_j(S^1 \times 0)$.

Schneide also $S^1 \times D^2$ an $s_0 \times D^2$ auf, für ein beliebiges $s_0 \in S^2$, um $I \times D^2$ zu erhalten. Damit geben uns die Kerne einen Zopf, da sie disjunkte Wege p_i sind, die in $0 \times D^2$ starten, $t \times D^2$ in genau einem Punkt pro Weg schneiden und in $1 \times D^2$ enden. Allerdings kann ein Kern zu mehr als einem Strang im Zopf werden.

Man kann $I \times D^2$ auch als Isotopie von zwei Diffeomorphismen von D^2 auf sich selbst auffassen und da alle Diffeomorphismen von D^2 , die auf dem Rand die Identität sind, isotop zur Identität relativ des Randes sind (und damit auch zu einem beliebig gewähltem Diffeomorphismus), gilt, dass $0 \times D^2$ als Diffeomorphismus $D^2 \rightarrow D^2$ aufgefasst, isotop zu $1 \times D^2$ ist und es damit einen Diffeomorphismus H relativ des Randes $I \times \partial D^2$ von $I \times D^2$ auf sich selbst gibt, für den gilt, dass $H(s_0 \times D^2) = H(1 \times D^2)$ für alle $s_0 \in I$, also jede Scheibe so aussieht wie die oberste (siehe zweites und drittes Bild in Abbildung 10).

Sei x_j der Punkt in D^2 , in dem der Weg p_j $1 \times D^2$ schneidet.

Da wir den Startpunkt des Weges kennen, können wir annehmen, dass $H(p_j) = I \times x_j$ und H die Identität auf $1 \times D^2 \cup I \times \partial D^2 \cup (0 \times x_j)$ ist.

Wähle jetzt Scheibenumgebungen B_j von x_j in D^2 für alle j . Nach Lemma 1 haben wir bereits eine Blätterung von $S^1 \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$ und wenn wir diese entlang $s_0 \times D^2$ aufschneiden, erhalten wir eine Blätterung F_1 auf $I \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$. Dies ist aber noch keine am Rand triviale Blätterung.

Mittels des Diffeomorphismus H^{-1} kann man diese Blätterung F_1 auf eine Blätterung F_2 von $(I \times D^2)$ ohne tubulare Umgebungen der p_j abbilden und es bleibt zu zeigen, dass die F_2 kompatibel bei $0 \times D^2$ und $1 \times D^2$ ist, so dass nach dem Verkleben dieser beiden Scheiben F_2 zu einer Blätterung F_3 des Volltorus V wird. Betrachte dafür den Diffeomorphismus eingeschränkt auf $0 \times D^2$:

Die Punkte $0 \times x_j$ werden wieder auf die Punkte $0 \times x_j$ abgebildet, aber nicht unbedingt auf den gleichen Punkt. Damit kann man auch einrichten, dass Umgebungen dieser Punkte auf solche Umgebungen abgebildet werden. Nach Konstruktion in Lemma 1 wissen wir, dass $0 \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$ die Blätter in einfach geschlossenen Kurven um $0 \times \partial B_j$ bzw. $0 \times \partial D^2$ sowie einem weiteren einzelnen Blatt außerhalb einer Umgebung N von $0 \times (\partial D^2 \cup \bigcup_{j=1}^q \partial \overset{\circ}{B}_j)$, schneidet und man kann einrichten, dass die Blätterung auf $[0, \epsilon] \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$ wie das Produkt der Blätterung

auf $0 \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$ mit $[0, \epsilon]$ aussieht. Damit sieht die Blätterung lokal um alle $[0, \epsilon] \times x_j$ gleich aus und auch das einzelne Blatt in $0 \times (D^2 - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{B}_j)$ wird von H auf sich selbst abgebildet. Damit werden beim Verkleben von $0 \times D^2$ und $1 \times D^2$ jeweils genau Blätter miteinander verklebt, womit man eine Blätterung auf $(S^1 \times D^2) - \bigcup_{j=1}^q \overset{\circ}{S}_j$ erhält.

□

3 Existenz der Blätterung

Damit haben wir alles um den Satz, der das Ziel dieser Arbeit war, zu beweisen:

Theorem 3.1 (Lickorish [4])

Zu jeder geschlossene orientierbare 3-Mannigfaltigkeit existiert eine 2-dimensionale Blätterung

Beweis. Ohne Einschränkung ist M zusammenhängend, sonst konstruiert man die Blätterungen auf jeder Zusammenhangskomponente separat. Sei M eine geschlossene, orientierbare und zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Verschlingung $\bigcup L_i$ in S^3 , so dass M aus S^3 durch Chirurgie längs dieser Verschlingung entsteht. Sei $T_i := \nu L_i$ der Chirurgievolltorus zugehörig zum Knoten i . Identifiziere S^3 ohne einen Punkt mit \mathbb{R}^3 und betrachte die Chirurgieverschlingung als Verschlingung im \mathbb{R}^3 . Mit Hilfe des Alexandertricks [1] kann man die Verschlingung so isotopieren, dass sie der Abschluss eines Zopfes ist und sich damit zu einer positiv um die z-Achse windenden Verschlingung isotopieren lässt. Da die Verschlingung beschränkt ist, lässt sie sich in einen Volltorus V_1 um die z-Achse einbetten, dessen Komplement ein Volltorus V_2 ohne einen Punkt ist, also einem Torus in S^3 entspricht. Dann existiert auf $V_1 - \bigcup T_i$ nach Lemma 2.2 eine am Rand triviale Blätterung. Auf V_2 und den T_i existiert die Reeb-Blätterung und durch Verkleben von diesen einzelnen Blätterungen erhält man nach der Chirurgie eine Blätterung von M .

□

Literatur

- [1] J. W. ALEXANDER, A Lemma on Systems of Knotted Curves, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **9**, 93–95, 1923
- [2] H. GEIGES, Geometrische Topologie, *Manuskript zur Vorlesung im WS 2017/2018*.
- [3] W. B. R. LICKORISH, A Representation of Orientable Combinatorial 3-Manifolds, *Annals of Mathematics*, **76**, 531–540, Mathematical Department, Princeton University, 1962
- [4] W. B. R. LICKORISH, A foliation for 3-manifolds, *Annals of mathematics*, **82**, 414–420, Mathematics Department, Princeton University, 1965
- [5] J. MILNOR, Lectures on the h-cobordism theorem, *Notes by L. Siebenmann and J. Sondow*, Princeton University Press, 1965
- [6] G. REEB, *Sur Certaines Proprietes Topologiques des Varietes Feuilletées*, Herman, 1952
- [7] A. D. WALLACE, Modifications and cobounding manifolds. *Canad. J. Math.*, **12**, 503–528, 196

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne die Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten und nicht veröffentlichten Schriften entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer anderen Prüfung noch nicht vorgelegt worden. Ich versichere, dass die eingereichte elektronische Fassung der eingereichten Druckfassung vollständig entspricht.

Köln, 16.7.2018

Bernhard Albach